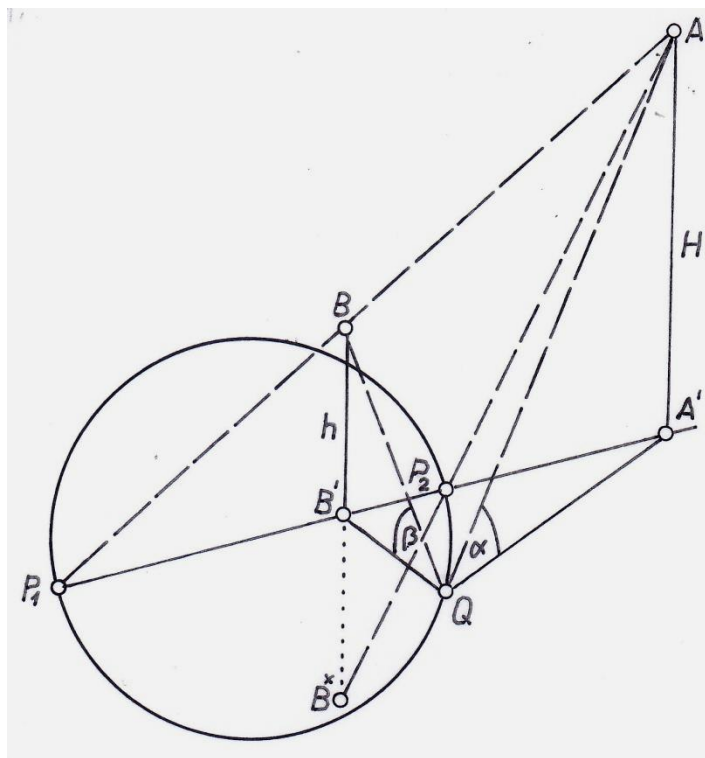


A HÁROM EGYENLŐ LÁTÓSZÖG FELADATA

Írta: Hajdu Endre

A címben szereplő feladat részletezve a következő: adott három, a terepsík fölötti, különböző magasságú A, B, C pont, keresendő a terepsík azon L pontja, melyből a megadott pontokhoz tartozó látósugarak dőlésszögei egyenlők. Vagyis az LA, LB, LC félegyenesek a terepsíkkal ugyanakkora szöget zárnak be.

Ha csak két adott pontról volna szó, mondjuk A és B -ről (1. ábra), akkor könnyen találhatnánk ilyen pontot.



1. ábra

Ha az említett pontok terepsík fölötti magassága H , ill. h , akkor az adott pontok összekötő egyenesének a terepsíkkal közös P_1 pontja máris egyike a keresett pontoknak. Ha a B pont B^* tükörképét kötjük össze A -val, akkor olyan P_2 pontot kapunk, mely ugyancsak megfelelő pont, bár a hozzá tartozó látószög nem egyenlő az iméntivel. Az ábra fentiekben kapott két pontja azonban egy-egy különleges megoldást jelent csak, de ha az e két ponthoz, mint átmérő végpontokhoz tartozó kört a terepsíkon megszerkesztjük, akkor annak minden pontja is megfelelő pont. Ugyanis az így kapott kör az A', B' vetületi pontokhoz tartozó

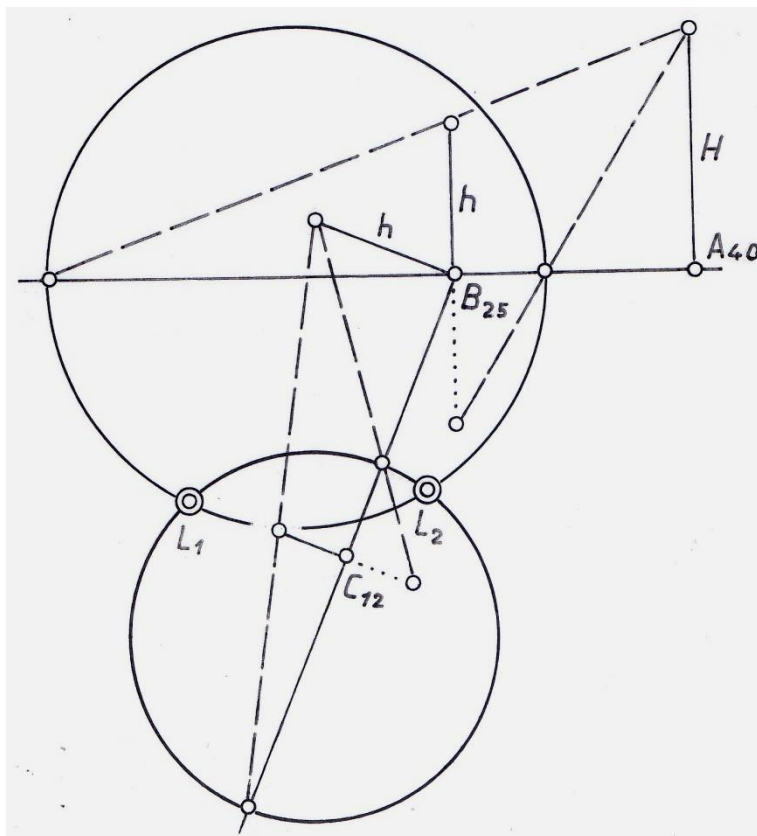
Apollonios-kör, melynek tetszőleges Q pontjára érvényes: $\frac{QA'}{QB'} = \frac{H}{h}$. Az ábra alapján az Apollonios-kör egy Q pontjához tartozó látószögek közti kapcsolat

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{QA'}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{QB'}$, $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = 1$, vagyis a két látószög egyenlő. Megjegyzendő

még, hogy a Q pontnak az A', B' egyenesre vonatkozó tükörképéhez ugyanakkora látószög tartozik, mint a Q ponthoz, persze csak az A és a B pontra vonatkozólag, de a kör két olyan pontjához, melyek nem egymás tükörképei, különböző látószögek tartoznak.

Abban az esetben, amikor az adott két pont magassága egyenlő, az Apollonios-kör középpontja a végtelenbe kerül, a végtelen sugarú kör végesben lévő darabja azonos a két pont A', B' vetületi pontjainak távolságfelező merőleges egyenesével.

Visszatérve mármost az eredeti feladathoz, annak megoldása a következő: előállítjuk az adott pontok vetületi pontjaihoz, vagyis az A_{40} és B_{25} pontokhoz tartozó Apollonios-kört (2. ábra), majd a B_{25}, C_{12} pontok esetén járunk el hasonlóan. Az indexek az egyes pontok terepsík feletti magasságát jelölik (1 cm a rajzon, 10 méternek felel meg a valóságban). Az így nyert két kör L_1 és L_2 metszéspontjai, ha léteznek, a keresett pontok. Az általános esetben így kapott két ponthoz tartozó látószögek általában különböznek. Az ábra nem tünteti föl az A, C pontokhoz tartozó Apollonios-kört, mely ez esetben szintén tartalmazná az L_1 és L_2 pontot. A lehetséges megoldás-számok: 0, 1, 2.



2. ábra

Különleges esetet jelent az, amikor a három adott pont ugyanabban a terepsíkra merőleges síkban van, de a terepsík keresett pontjának meghatározása szempontjából nem igényel további meggondolást.

EGY ROKON FELADAT

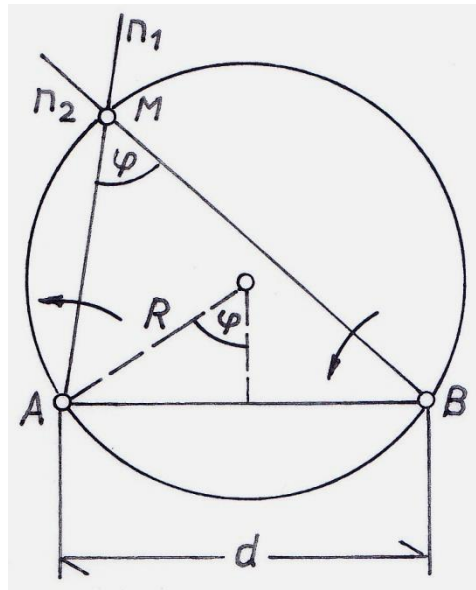
A fentiekben tárgyalt feladattal rokon probléma fogalmazható meg a következőképpen: keressük a terepsík azon L pontját, mely adott a, b, c kitérő egyenesekkel három, egyenlő dőlésszögű $(La), (Lb), (Lc)$ síkot határoz meg.

Ezúttal is célszerű először két kitérő egyenessel foglalkozni. Alkalmas dőlés-kúpok segítségével szerkeszthetők meg az egyeneseket tartalmazó síkok, (az egyeneseken felvett egy-egy pont csúcspontja egy-egy dőléskúpnak, melyhez az egyenest tartalmazó érintősíkot kell szerkeszteni). Valamely érintősík dőlésszöge legalább akkora, mint a megfelelő egyenesé. A dőlésszög változtatásával a síkok nyomvonalai (a terepsíkon) változnak; két adott egyenes esetén a keresett síkok nyomvonalai egymást egy M pontban metszik, mely a dőlésszög és a nyomvonalak változása során görbét ír le, ez általános esetben másodrendű görbe. Másik két egyeneshez másik nyomvonal-metszéspontra tartozik, s ha ennek és az előbb nyert görbének közös pontját megszerkesztjük, az a keresett L lesz, mert e pontot az adott egyenesek nyompontjaival összekötő egyenesek már az adott egyeneseket tartalmazó, egyenlő dőlésszögű síkok nyomvonalai.

Azonban a másodrendű nyomvonal-metszéspontra görbék közös pontjai csak különleges esetekben szerkeszthetők meg körzővel és vonalzóval, ezért tetszőlegesen felvett kitérő egyenesek esetén a vázolt út nem járható.

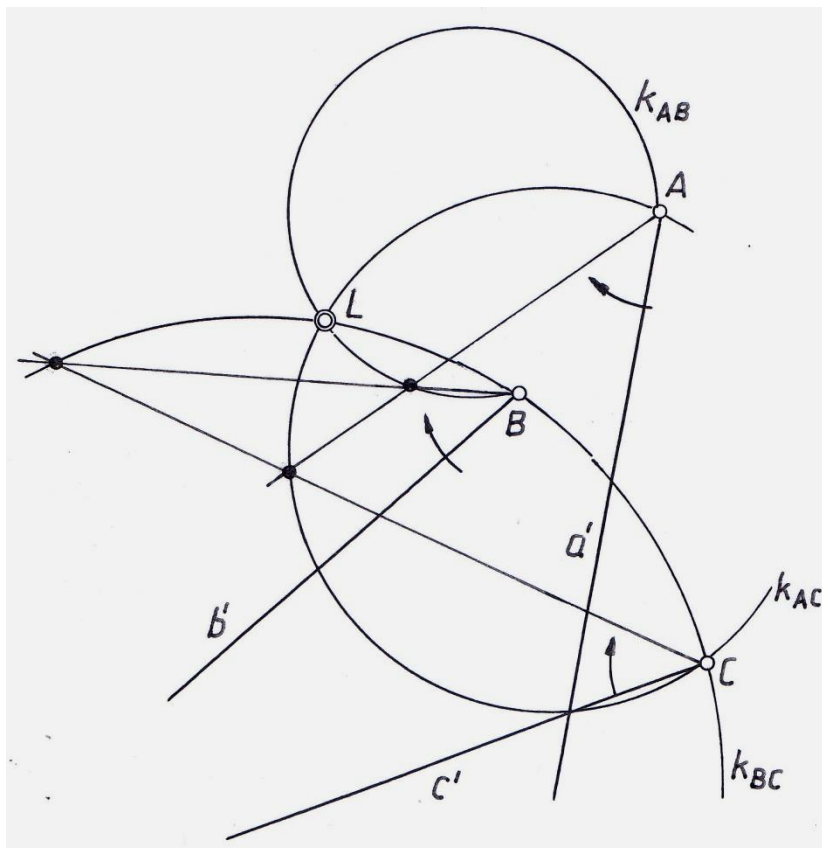
Megoldható azonban a feladat, ha az adott kitérő egyenesek dőlésszögei egyenlők. Ekkor ugyanis a nyomvonalak metszéspontra görbéje kör. Ha például az a és b egyenes nyompontja A ill. B , akkor az egyeneseket tartalmazó, egyenlő dőlésszögű síkok nyomvonalai legyenek n_1 és n_2 (3. ábra). Ha a két kitérő egyenest tartalmazó síkok dőlés-szögét egyenlő módon változtatjuk, mégpedig oly módon, hogy a nyomvonalak az A, B pontok körül azonos forgásirány szerint fordulnak el, akkor az elforgó nyomvonalak φ hajlásszöge változatlan marad. A két nyomvonal M metszéspontra azt az A, B pontokra szerkesztett kört írja le, melynek pontjaiból a két pont φ szögben látszik (pontosabban a két ponthoz tartozó látókörvonalról és az azt körre kiegészítő körív együtteséről van szó). A kör sugara az ábra jelöléseivel $R = \frac{d}{2 \sin \varphi}$. Ha az A, B

pontok körül forgó egyenesek forgásiránya ellentétes, akkor a metszéspontra által leírt görbe hiperbola, de annak jellemzése a tárgyalt feladat szempontjából nem szükséges.



3. ábra

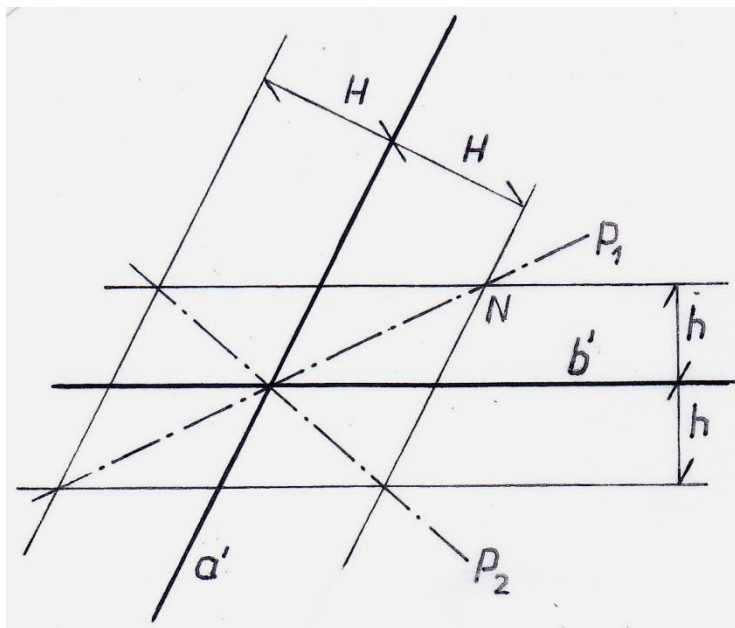
Visszatérve a két kitérő egyenest tartalmazó, egyenlő dőlésszögű síkokhoz, a fentebbiek ismeretében belátható, hogy az egyeneseken sorozott síkok nyomvonalai közül kijelölhetők olyanok, melyek metszéspontjai kört, ill. körívet alkotnak. A megadott három kitérő egyenes közül három különböző páros alakítható ki, melyekhez ugyanannyi körpár szerkeszthető. A lehetséges megoldások számának meghatározásával nem foglalkozunk, csupán egy megadott egyenes-hármas esetén alkalmazzuk az elmondottakat (4. ábra).



4. ábra

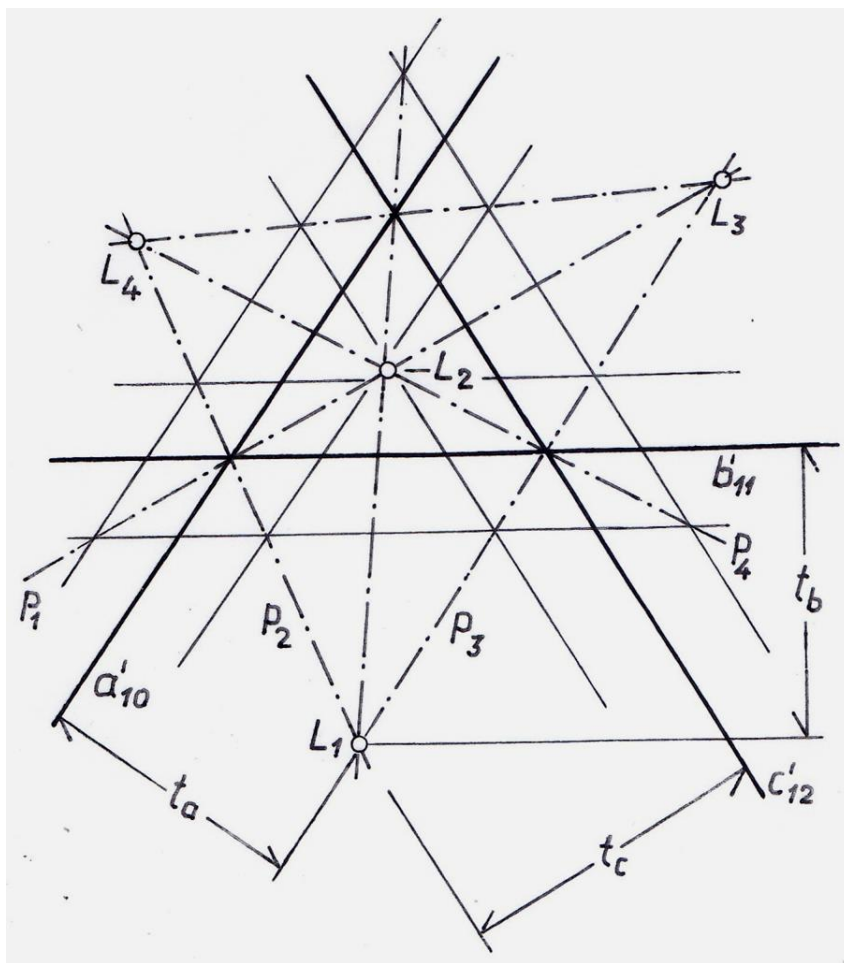
Figyelemre méltó, hogy az adott egyenesek dőlésszögére nincs szükség az L pont megszerkesztése során, csupán a terepsíkra vonatkozó merőleges vetületükre. A keresett síkok dőlésszöge persze már függvénye az egyenesek dőlésszögének. Az ábra áttekinthetősége végett a keresett síkok nyomvonalait (LA, LB, LC) nem tünteti fel az ábra és nem folytatódik az ábra az adott egyenesek képsíkszögének megadásával.

Különleges esete a feladattípusnak az, amelyben a kitérő egyenesek dőlésszöge 0, vagyis az adott kitérő egyenesek párhuzamosak a terepsíkkal, de különböző magasságúak. Ezúttal is két ilyen egyenes estével érdemes foglalkozni először. Ha az a és b egyenes magassága a terepsík felett H , ill. h , akkor az egyeneseken áttett, egyenlő dőlésszögű síkok nyomvonalainak metszéspontja által leírt vonal egyenes. Ennek az egyenesnek egy pontja az a', b' egyenesek közös pontja, egy további pont az a, b egyeneseken áttett 45° dőlésszögű síkok nyomvonalainak közös N pontja, mely a H, h távolságú párhuzamos egyenesek megszerkesztésével adódik. A kapott párhuzamos egyenespárok pont-vonallal jelölt átló egyenesének bármely pontján és a kitérő egyeneseken áttett két sík dőlésszöge egyenlő; a dőlésszög persze pontról pontra különbözik. Az imént mondott, pont-vonallal rajzolt egyeneseket a rövidség érdekében csak p -egyenesként említjük a következőkben; ilyenek az 5. ábra p_1 és p_2 egyenesei.



5. ábra

Ezek után három különböző magasságú „vízszintes” egyenes estén a keresett L pont meghatározása úgy történhet, hogy megszerkesztjük a három egyenes közül kettőnek a p -egyeneseit. A 6. ábrán ilyen az a, b pár, melyhez a p_1 és p_2 tartozik; majd választunk egy másik párt, ez az ábrán a b, c pár, a megfelelő p -egyenesek p_3 és p_4 . Az így kapott egyenesek közös pontja az L_1 valamint L_2 .



6. ábra

Hasonló módon folytatva a szerkesztést, kapjuk az L_3 és L_4 pontot. Általános esetben 4 pont adódik, melyek mindegyikén és a három adott egyenesen át egyenlő, de pontonként általában különböző dőlésszögű síkok fektethetők. Az ábrán indexek jelölik az adott egyenesek terepsík fölötti magasságát, melyek ismeretében ellenőrizhető, hogy például az L_1 ponton és az adott egyeneseken áttett síkok dőlésszögének közös tangense $\frac{10}{t_a} = \frac{11}{t_b} = \frac{12}{t_c} \approx 2,68$; vagyis kb. $69,5^\circ$

dőlésszögű síkok tartoznak az L_1 ponthoz. Hasonló módon eljárva például L_4 -nél kb. $74,4^\circ$ dőlésszög adódik. A különleges esetek közül figyelmet érdemel az, melynél két különböző magasságú, egymással párhuzamos egyenes és egy azokkal nem párhuzamos van adva.

Sopron, 2018. 01. 12.